TESTE I
MATEMÁTICA APLICADA
GUIA DE CORREÇÃO

Turmas: LGF21 | Data: 12-Abril-2024
Ano Lectivo: 2024-1º Semestre | Duração: 100min.
Nome do Docente: Nelson Mulemba | Pontuação: 200

Questões

1. No ano de 2022, a Autoridade Tributária cobrou em receita (milhões de meticais) na Cidade de Maputo, 177,351.48. Um relatório similar indica que em 2019 foram cobrados 178,904.22. Se assumirmos que a receita pode ser modelada linearmente. Determine:

   (a) (**18 Pontos**) A função que representa a receita cobrada em função do tempo
   Resolução:
   Seja t tempo em anos, se $t = 0$ corresponde a 2019, então $t = 3$ corresponde a 2022 .
   Seja $R(t)$ a Receita em meticais no ano t. A Receita de 2019 é $R(0) = 178,904.22$ e $R(3) = 177,351.48$.
   A taxa de variação é dada por: $a = \dfrac{R(3) - R(0)}{3 - 0} = \dfrac{177,351.48 - 178,904.22}{3} = -517.58$
   Aplicando a fórmula de uma função do 1ºgrau ou determinando o coeficiente $b = R(0)$ e escrevendo a função Lucro: $R(t) = -517.58t + 178,904.22$.
   De 2018 a 2021, a receita cobrada tem teve um declínio em 517.58 milhões de meticais anualmente.

   (b) (**7.0 Pontos**) Qual é a previsão da receita para o ano de 2025?
   Resolução:
   Somos dado ano de 2025 $t = 7$ e pretende-se o valor de $R(7)$. De acordo com o resultado da alínea a), tem-se que: $R(t) = -517.58t + 178,904.22 = 175,281.16$ milhões de meticais.
   Resposta: Para o ano de 2025, espera-se que a Autoridade Tributária arrecada cerca de 175,281.16 milhões de meticais.

2. (**22 Pontos**) O facturamento (em centenas de dolares) da provenientes da venda de máquinas calculadoras é dado pela função $R(x) = -0.1x^2 + 50,000$, onde x denota o número de unidades (em dezenas) produzidas por mês. Sabe-se ainda que as quantidades vendas dependem do preço particado é dado por $x = -2p + 1800$. Determine a receita em função do preço e calcule a receita se o preço praticado por unidade for de 600 dolares.
   Resolução:
   A função receita em relação ao preço é a função composta dada por
   $R(x(p)) = -0.1x^2 + 50,000 \iff R(p) = -0.1(-2p + 1800)^2 + 50,000$. A receita se o preço praticado por unidade for de 600 dólares é dado por
   $(p = 600)$, $R(600) = -0.1(-2 \cdot 600 + 1800)^2 + 50,000 = 14,000$
   Resposta: A receita se o preço praticado por unidade for de 600 meticais é de $1,400,000$ dolares.(pois está em centenas)

3. As funções de custo e receita para certa empresa são dadas por $C(x) = 12x + 20\ 000$ e $R(x) = 20x$ em meticais, respectivamente. Determine:

   (a) (**15 Pontos**) O custo fixo, custo por unidade e o preço praticado.
   Resolução:
   Do texto tem-se que o custo fixo é de 20 000 meticais e o custo por unidade 12 meticais e preço de venda é de 20 meticais

   (b) (**20 Pontos**) O break-even point (*ponto de ruptura*) e interprete.
   Resolução:
   O ponto de ruptura decorre quando o valor da receita é igual ao custo de produção,
   $C(x) = R(x)$, resolvendo a equação tem-se:

$C(x) = R(x) \iff 20x = 12x + 20\,000 \iff 8x = 20\,000 \iff x = 2500$
Apos vender se 2500 unidades o lucro será nulo. Ou seja, com 2500 unidades vendidas, se recupera o valor investido.

4. A popularização da música digital e as melhorias no formato DVD são algumas das razões pelas quais o preço médio de um gravador de DVD diminui no passado. A projecção do preço médio era dado por $P(t) = 699(t+1)^{-0.94}$, no ano t, com $t = 0$ correspondendo a 2002. Determine:

   (a) (**07 Pontos**) Qual era o preço médio em 2004?
   Resolução:
   Para o ano de 2004 ($t = 2$) o preço médio era de $P(2) = 699(2+1)^{-0.94} = 248.87$ unidades monetárias.

   (b) (**18 Pontos**) A taxa de variação do preço em 2006.
   Resolução:
   A taxa de variação é dada pela derivada da função vendas
   $P'(t) = (699(t+1)^{-0.94})' \iff P'(t) = -657.06(t+1)^{-1.94}$
   Para o ano de 2006, vamos para $(t = 4)$, logo
   $P'(4) = -657.06(4+1)^{-1.94} = -28.95$. Para o ano de 2007, o preço médio decresceu em 28.95 unidades monetárias em relação ao ano anterior.

5. A quantidade semanal demandada x (em centenas de unidades) de câmeras digitais está relacionada com o preço unitário p (em centenas de dólares) pela equação $x^2 + 5p = 400$, $(0 \leq p \leq 80)$ Actualmente câmera digital custa 7 mil dólares.

   (a) (**28 Pontos**) Interprete e classifique a elasticidade da demanda para o preço em vigor.
   Resolução:
   Antes de mais nada temos que determinar a elasticidade. A funcção demanda é
   $x^2 + 5p = 400 \iff x = \sqrt{400 - 5p}$, então $x = f(p) = \sqrt{400 - 5p}$, a sua derivada é $f'(p) = \frac{1}{2} \cdot (400 - 5p)^{-\frac{1}{2}} (400 - 5p)' = -\frac{2.5}{\sqrt{400-5p}}$. Determinando a elasticidade, aplicando a fórmula tem-se:
   $E(p) = \left| \dfrac{pf'(p)}{f(p)} \right| = \dfrac{2.5p}{400 - 5p}$. O preço em vigor é 7 mil meticais $(p = 70)$, logo
   $E(70) = \dfrac{2.5 \cdot 70}{400 - 5 \cdot 70} = \dfrac{175}{50} = 3.5$
   Quando o preço é 7mil meticais, uma variação no preço em 1% irá causar uma diminuição em 3.5% na demanda.
   Como $E(70) > 1$, então a demanda é elástica

   (b) (**05 Pontos**) Se o preço da câmera for aumentado, a receita aumentará ou diminuirá?
   Resposta: A receita diminuirá pois, quando o preço é 7 mil meticais, a demanda é elástica.

6. A demanda semanal de máquinas para cópias é dada pela equação da demanda $p = 2000 - 0.04x$, $(0 \leq x \leq 50.000)$ onde p é o preço unitário em centenas de meticais e x a quantidade demandada. A função custo total semanal é dado por $C(x) = 0.000002x^3 - 0.02x^2 + 1000x + 120\,000$ milhares de meticais. Determine:

   (a) (**15 Pontos**) A função Receita total e Lucro total
   Resolução:
   A equação demanda dada em preço é $p = 2000 - 0.04x$ e a quantidade x então a função receita total $R(x) = p \cdot x \Longrightarrow R(x) = -0.04x^2 + 2000x$.
   A partir da Receita, podemos determinar a equação lucro total:
   $L(x) = R(x) - C(x) \iff L(x) = -0.04x^2 + 2000x - (0.000002x^3 - 0.02x^2 + 1000x + 120\,000) \Longrightarrow$
   $L(x) = -0.000002x^3 - 0.02x^2 + 1000x - 120\,000$.

   (b) (**15 Pontos**) O custo de 4000 máquinas e o lucro de 5000 máquinas.
   Resolução:
   $C(4000) = 0.000002 \cdot 4000^3 - 0.02 \cdot 4000^2 + 1000 \cdot 4000 + 120\,000 = 3\,928\,000$
   O custo total de 4000 máquinas é de 3 928 000 meticais.
   $L(5000) = -0.000002 \cdot 5000^3 - 0.02 \cdot 5000^2 + 1000 \cdot 5000 - 120\,000 = 4\,130\,000$
   O lucro total de 5000 máquinas é 4 130 000 de meticais.

(c) (**20 Pontos**) Determine o custo marginal para $x = 4000$ e interprete
Resolução:
Custo marginal é a derivada da função custo total é:
$C_{mg}(x) = (0.000002x^3 - 0.02x^2 + 1000x + 120\,000)' = 0.000006x^2 - 0.04x + 1000$, substituindo por $x = 4000$, tem-se:
$C_{mg}(4000) = 0.000006 \cdot (4000)^2 - 0.04 \cdot (4000) + 1000 = 936$
Depois de produzir-se 4000 unidades, o custo de produção de uma unidade adicional é aproximadamente a 936 meticais.

(d) (**10 Pontos**) Com base em (6b) determine o custo para produzir a 4001a unidade.
Resolução:
O custo de produção da 4001ª unidade pode ser obtido através da diferença do custo de 4001 unidades pelo custo de 4000 unnidades. Logo
$C(4001) - C(4000) = C(4001) - 3\,928\,000 = 3\,928\,936.00 - 3\,928\,000 = 936$
O custo de produção da 5001ª unidade é 936 meticais. (Que não se difere em termos monetários com o custo marginal obtido na alínea anterior).

Bom trabalho!
Incrível!
"Não se pode fugir da fraqueza. Você deve lutar ou falecer; e se for assim, por que não agora e onde você está?" Robert Louis Stevenson

Texto editado em LaTeX

TESTE I
MATEMÁTICA APLICADA
GUIA DE CORREÇÃO

Turmas: LCA21 — Data: 12-Abril-2024
Ano Lectivo: 2024-1º Semestre — Duração: 100min.
Nome do Docente: Nelson Mulemba — Pontuação: 200

Questões

1. No ano de 2018, a Autoridade Tributária cobrou em receita (milhões de meticais) na Cidade de Maputo, 121,556.89. Um relatório similar indica que em 2021 foram cobrados 216,362.27. Se assumirmos que a receita pode ser modelada linearmente. Determine:

   (a) (**18 Pontos**) A função que representa a receita cobrada em função do tempo
   Resolução:
   Seja t tempo em anos, se $t = 0$ corresponde a 2018, então $t = 3$ corresponde a 2021 .
   Seja $R(t)$ a Receita em meticais no ano t. A Receita de 2018 é $R(0) = 121,556.89$ e $R(3) = 216,362.27$.
   A taxa de variação é dada por: $a = \dfrac{R(3) - R(0)}{3 - 0} = \dfrac{216,362.27 - 121,556.89}{3} = 31,601.79$
   Aplicando a fórmula de uma função do 1ºgrau ou determinando o coeficiente $b = R(0)$ e escrevendo a função Lucro: $R(t) = 31,601.79t + 121,556.89$.
   De 2018 a 2021, a receita cobrada tem teve um incremento em $31,601.79$ milhões de meticais anualmente.

   (b) (**7.0 Pontos**) Qual é a previsão da receita para o ano de 2025?
   Resolução:
   Somos dado ano de 2025 $t = 7$ e pretende-se o valor de $R(7)$. De acordo com o resultado da alínea a), tem-se que: $R(t) = 31\,601.79 \cdot 7 + 121\,556.89 = 342,769.42$ milhões de meticais.
   Resposta: Para o ano de 2025, espera-se que a Autoridade Tributária arrecada cerca de 342,769.42 milhões de meticais.

2. (**22 Pontos**) O facturamento mensal R (em dezenas de meticais) obtido com a venda dos barbeadores elétricos está relacionado ao preço por unidade p (em milhares de meticais) pela equação $R(p) = -0.5p^2 + 30p$. O preço depende da quantidade procurada x unidades, dada pela função $p(x) = -2x + 80$. Determine a receita em função de unidades e calcule a receita para 30 barbeadores.
   Resolução:
   A função receita em relação às unidades é a função composta dada por
   $R(p(x)) = -0.5p^2 + +30p \iff R(p(x)) = -0.5(-2x + 80)^2 + 30(-2x + 80) \iff$
   $R(x) = -0.5(-2x + 80)^2 - 60x + 2,400$. A receita para 30 barbeadores é dado por
   $(x = 30)$, $R(30) = -0.5(-2 \cdot 30 + 80)^2 - 60 \cdot 30 + 2,400 = 400$
   Resposta: A receita para 30 barbeadores é de 4000 meticais.(pois está em dezenas)

3. As funções de custo e receita para certa empresa são dadas por $C(x) = 125x + 20\,000$ e $R(x) = 200x$ em meticais, respectivamente. Determine:

   (a) (**15 Pontos**) O custo fixo, custo por unidade e o preço praticado.
   Resolução:
   Do texto tem-se que o custo fixo é de 20 000 meticais e o custo por unidade 125 meticais e preço de venda é de 200 meticais

   (b) (**20 Pontos**) O break-even point (*ponto de ruptura*) e interprete.
   Resolução:
   O ponto de ruptura decorre quando o valor da receita é igual ao custo de produção, $C(x) = R(x)$, resolvendo a equação tem-se:
   $C(x) = R(x) \iff 200x = 125x + 20\,000 \iff 75x = 20\,000 \iff x = 266,67 \approx 267$

Apos vender se 267 unidades o lucro será nulo. Ou seja, com 267 unidades vendidas, se recupera o valor investido.

4. As vendas mundiais de cartões de memória (em bilhões de dólares) é aproximado pela função $V(t) = 4.3(t+2)^{0.94}$, $(0 \leq t \leq 8)$, onde t é medido em anos, com $t = 0$ correspondendo a 2002. Determine:

   (a) (**07 Pontos**) Quuais foram as vendas mundiais de cartões de memória em 2005?.
   Resolução:
   Para o ano de 2005 $(t = 3)$, as vendas mundiais de cartões foram de $V(2) = 4.3(3+2)^{0.94} = 19.52$ bilhões de dólares.

   (b) (**18 Pontos**) A taxa de variação das vendas em 2007.
   Resolução:
   A taxa de variação é dada pela derivada da função vendas
   $V'(t) = (4.3(t+2)^{0.94})' \Longleftrightarrow V'(t) = 4.402(t+2)^{-0.06}$
   Para o ano de 2007, vamos para $(t = 5)$, logo
   $V'(5) = 4.402(5+2)^{-0.06} = 3.92$. Para o ano de 2008, as vendas mundiais de cartões de memória aumentaram em 3.92 bilhões de dólares em relação ao ano anterior.

5. A função demanda para uma certa marca de bicicletas (brinquedos) é dada por $p^2 + 0.02x = 9$, $(0 \leq x \leq 450)$ onde p é o preço unitário em milhares de meticais e x é a quantidade da demanda semanal.. Actualmente o preço de bicileta é de 4 mil meticais.

   (a) (**28 Pontos**) Interprete e classifique a elasticidade da demanda para o preço em vigor.
   Resolução:
   Antes de mais nada temos que determinar a elasticidade. A funcção demanda é
   $p^2 + 0.02x = 9 \Longleftrightarrow x = \dfrac{9-p^2}{0.02}$, então $x = f(p) = 450 - 50p^2$, a sua derivada é $f'(p) = -100p$.
   Determinando a elasticidade, aplicando a fórmula tem-se:
   $E(p) = \left|\dfrac{pf'(p)}{f(p)}\right| = \dfrac{100p^2}{450-50p^2}$. O preço em vigor é 4 mil meticais $(p = 4)$, logo
   $E(4) = \dfrac{100 \cdot 4^2}{450 - 50 \cdot 4^2} = \dfrac{1600}{350} = 4.71$
   Quando o preço é 4 mil meticais, uma variação no preço em 1% irá causar uma diminuição em 4.71% na demanda.
   Como $E(4) > 1$, então a demanda é elástica

   (b) (**05 Pontos**) Se o preço da bicicleta for aumentado, a receita aumentará ou diminuirá?
   Resposta: A receita diminuirá pois quando o preço é 4 mil meticais, a demanda é elástica.

6. A demanda semanal de máquinas para cópias é dada pela equação da demanda $p = 2000 - 0.04x$, $(0 \leq x \leq 50.000)$ onde p é o preço unitário em centenas de meticais e x a quantidade demandada. A função custo total semanal é dado por $C(x) = 0.000002x^3 - 0.02x^2 + 1000x + 120\,000$ milhares de meticais. Determine:

   (a) (**15 Pontos**) A função Receita total e Lucro total
   Resolução:
   A equação demanda dada em preço é $p = 2000 - 0.04x$ e a quantidade x então a função receita total $R(x) = p \cdot x \Longrightarrow R(x) = -0.04x^2 + 2000x$.
   A partir da Receita, podemos determinar a equação lucro total:
   $L(x) = R(x) - C(x) \Longleftrightarrow L(x) = -0.04x^2 + 2000x - (0.000002x^3 - 0.02x^2 + 1000x + 120\,000) \Longrightarrow$
   $L(x) = -0.000002x^3 - 0.02x^2 + 1000x - 120\,000$.

   (b) (**15 Pontos**) O custo de 5000 máquinas e o lucro de 4500 máquinas.
   Resolução:
   $C(5000) = 0.000002 \cdot 5000^3 - 0.02 \cdot 5000^2 + 1000 \cdot 5000 + 120\,000 = 4\,870\,000$
   O custo total de 5000 máquinas é de 4 870 000 meticais.
   $L(4500) = -0.000002 \cdot 4500^3 - 0.02 \cdot 4500^2 + 1000 \cdot 4500 - 120\,000 = 3\,792\,750$
   O lucro total de 4500 máquinas é 3 792 750 de meticais.

(c) (**20 Pontos**) Determine o custo marginal para $x = 5000$ e interprete
Resolução:
Custo marginal é a derivada da função custo total é:
$C_{mg}(x) = (0.000002x^3 - 0.02x^2 + 1000x + 120\,000)' = 0.000006x^2 - 0.04x + 1000$, substituindo por $x = 5000$, tem-se:
$C_{mg}(5000) = 0.000006 \cdot (5000)^2 - 0.04 \cdot (5000) + 1000 = 950$
Depois de produzir-se 5000 unidades, o custo de produção de uma unidade adicional é aproximadamente a 950 meticais.

(d) (**10 Pontos**) Com base em (6b) determine o custo para produzir a 5001ª unidade.
Resolução:
O custo de produção da 5001ª unidade pode ser obtido através da diferença do custo de 5001 unidades pelo custo de 5000 unnidades. Logo
$C(5001) - C(5000) = C(5001) - 4\,870\,000 = 4\,870\,950.01 - 4\,870\,000 = 950.01$
O custo de produção da 5001ª unidade é 950.01 meticais. (Que não se difere em termos monetários com o custo marginal obtido na alínea anterior).

Bom trabalho!

Incrível!

"Não se pode fugir da fraqueza. Você deve lutar ou falecer; e se for assim, por que não agora e onde você está?" Robert Louis Stevenson

Texto editado em LaTeX